Основы механики сплошной среды

для геологических исследований

Введение

- Предмет механики сплошных сред.
- Сплошная среда. Поле некоторой величины.
- Координаты. Координатные линии, векторы базиса.
- Векторы. Сложение, представление в виде разложения по векторам базиса, компоненты вектора.

Предмет механики сплошных сред (МСС)

Механика сплошных сред (МСС) – раздел физики, **предметом** изучения которого является макроскопические движения, равновесия, силовые взаимодействий различных сред, таких, как *газы и жидкости* (вода, нефть, воздух), другие, а также *твердые деформируемые* среды (металлы, горные породы, грунт, строительные материалы, ткани живых организмов и т. д.)

Разные по своим свойствам среды изучаются в одной науке, потому что поведение всех сред подчиняется одним и тем же физическим законам: законам сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии, а также второму закону (началу) термодинамики.

МСС содержит общие **основы следующих наук**: механика жидкости, газовая динамика, сопротивление материалов, теория упругости, теория пластичности, магнитная гидродинамика, биомеханика и другие.

Основной метод МСС – **математическое** моделирование.

Математическая модель:

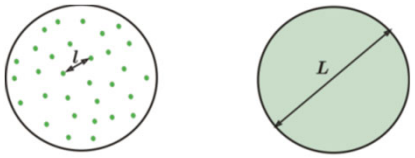
1) набор количественных параметров, характеризующих изучаемые процессы,
2) уравнения, их связывающие, и условия, которые позволяют рассчитать эти параметры.

3

Понятие сплошной среды

Сплошная среда — это среда, заполняющая занятую ею область **непрерывно**, то есть в любом **сколь угодно малом** объеме этой области содержится масса

реальная среда **модель** - сплошная среда



В действительности все среды имеют дискретное строение, состоят из молекул размером d, находящихся на расстоянии $l >> d$ друг от друга.

Например, радиус молекулы водорода $d \sim 10^{-8}$ см, а радиус ядра в 100 000 раз меньше.

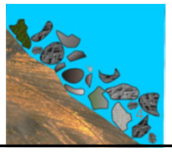
Расстояние между молекулами $l \sim 10^{-5}$ см, то есть в 1000 раз больше, чем размер молекулы.

В то же время расстояния между частицами обычно много меньше размеров изучаемых тел

Кубик воздуха

Если масштаб изучаемого явления L таков, что $\boldsymbol{l} << \boldsymbol{L}$, то можно использовать **модель** сплошной среды

Камнепад (движение отдельных камней) **можно описывать** описывается как поток сплошной среды

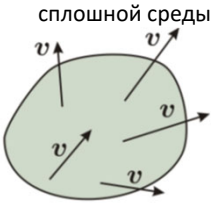


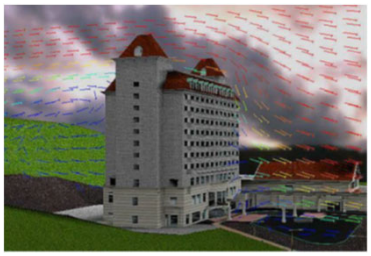
Поле некоторой величины

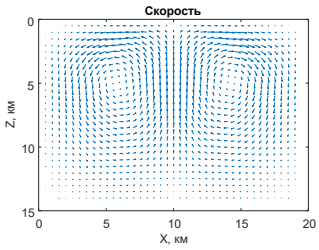
Если некоторая величина задана **во всех точках** рассматриваемой области, то говорят о **поле** этой величины. Например, поле скорости — это совокупность скоростей всех точек среды в рассматриваемой области

материальная точка и ее скорость

поле скорости сплошной среды







Координаты, координатные линии, векторы базиса

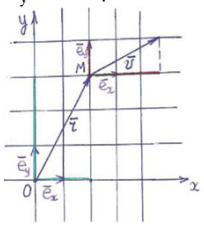
Координаты - 3 числа (в **3х-мерном** пространстве), которые задают положение точки относительно заданной системы отсчета: $x, y, z; x_1, x_2, x_3; r,\theta,\varphi$ и т.д.

Координатные линии – линии, на которых две из координат постоянны, меняется лишь одна. Через любую точку проходят 3 координатные линии

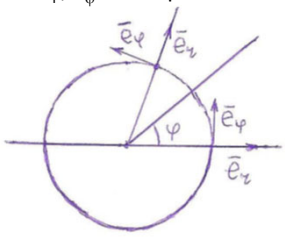
Векторы базиса – направлены по касательным к координатным линиям, в декартовой системе координат они взаимно ортогональны и имеют единичную длину

Системы координат на плоскости

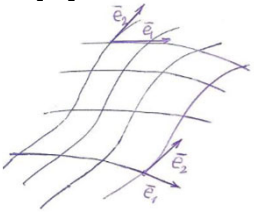
декартова,
e_x, e_y - векторы базиса



полярная,
e_r, e_φ - векторы базиса



криволинейная,
e_1, e_2 - векторы базиса



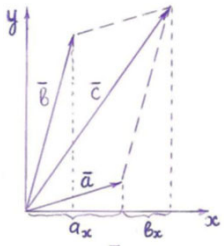
в основном будем использовать **декартову** систему координат

Векторы (повторение)

Разложение векторов по векторам базиса:
Коэффициенты при векторах базиса в разложении вектора по векторам базиса называют компонентами вектора в этом базисе.
В декартовых координатах компоненты вектора равны проекциям вектора на координатные оси.

$$\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2$$

Правило **сложения** векторов.



$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$$
$$c_x = a_x + b_x$$
$$c_y = a_y + b_y$$

Скалярное произведение векторов
$\mathbf{m}_1=(x_1,y_1,z_1)$ и $\mathbf{m}_2=(x_2,y_2,z_2)$
$(\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m})_2 = (x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2)$.
$(\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m})_2 = m_1\cdot m_2\cos(\ )\delta(m_1$ и m_2 – длины векторов)

Лагранжево и Эйлерово описание движения сред. Индивидуальная производная по времени

- Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты
- Закон движения сплошной среды.
- Два подхода к описанию движения: лагранжев и эйлеров
- Материальная (индивидуальная, полная) производная по времени
- Формулы для вычисления ускорения по скорости
- Линии тока и траектории.
- Установившееся и неустановившееся движение

Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты

Пространственная система координат – это система, относительно которой изучается движение.

Пространственные или эйлеровы координаты (по имени знаменитого ученого 18-го века Леонарда Эйлера) — это координаты точек среды **в пространственной системе координат.** x, y, z; или x_1, x_2, x_3

Если среда **движется**, то пространственные координаты индивидуальных точек среды меняются со временем, то есть являются функциями времени – разными для разных точек: $x_i = x_i(t,\ldots)$, где **…** - метка («имя») точки

Чтобы **отметить** индивидуальные точки среды, можно, например, задать значения их пространственных координат в начальный момент времени x_{10}, x_{20}, x_{30} и использовать x_{10}, x_{20}, x_{30} в качестве метки (имени) частицы. Тогда для индивидуальных точек

$$x_1 = x_1(t, x_{10}, x_{20}, x_{30}),$$
$$x_2 = x_2(t, x_{10}, x_{20}, x_{30}),$$
$$x_3 = x_3(t, x_{10}, x_{20}, x_{30}).$$

Для параметров, выделяющих **индивидуальные** точки, часто используют обозначения ξ_1, ξ_2, ξ_3

Чаще всего (но не обязательно): $\xi_1 = x_{10}, \xi_2 = x_{20}, \xi_3 = x_{30}$

Материальными или лагранжевыми координатами (по имени знаменитого ученого 18-го века Ж.Л. Лагранжа) называются параметры ξ_1, ξ_2, ξ_3 которые выделяют индивидуальные точки среды. Для индивидуальной точки лагранжевы координаты **не меняются** в процессе движения.

Закон движения сплошной среды

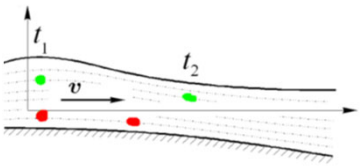
При движении среды **пространственные координаты** ее **индивидуальных** точек являются функциями времени и лагранжевых координат точки:

$$x_1 = x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$
$$x_2 = x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$
$$x_3 = x_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Закон движения – это соотношения, показывающие, как меняются со временем **пространственные** координаты **индивидуальных точек** среды.

Лагранжев и Эйлеров подходы к описанию движения

Лагранжев подход (лагранжево описание). При описании движения по Лагранжу мы следим за тем, что происходит в каждой индивидуальной точке , которая движется через пространство



При **Лагранжевом описании** все величины (скорость v, температура T, давление p и т.д.) рассматриваются как функции времени и *лагранжевых* координат:

$$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3),\ T=T(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3),\ p=p(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

Эйлеров подход (эйлерово описание). При описании движения по Эйлеру мы изучаем, что происходит в точках пространства, через которые движется среда

Величины, характеризующие движение сплошной среды, рассматриваются при эйлеровом подходе как функции времени t и пространственных координат x_1, x_2, x_3

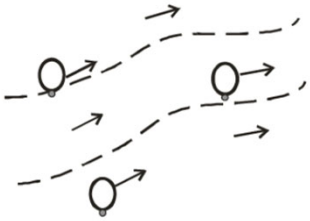
$$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}(t,x_1,x_2,x_3),\ T=T(t,x_1,x_2,x_3),\ p=p(t,x_1,x_2,x_3)$$

x_1, x_2, x_3 координаты точек пространства, в которых мы наблюдаем или вычисляем параметры среды.

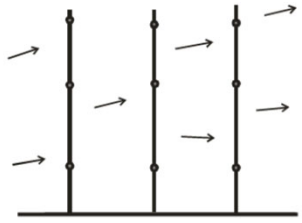
11

Сравнение лагранжева и эйлерова подходов

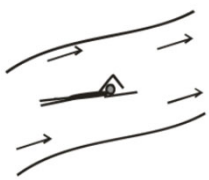
Лагранжево описание:
шары с измерительными приборами летят вместе с частицами воздуха



Эйлерово описание:
параметры воздушного потока измеряют приборы, помещенные на специальных мачтах



Лагранжев подход



Эйлеров подход

12

Материальная (индивидуальная) производная по времени

Материальная или индивидуальная производная по времени от величины f описывает, как меняется со временем величина f в **индивидуальной точке** среды $\frac{df}{dt}$

При задании f по способу Лагранжа, то есть когда $f = f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$,
Для индивидуальной точки при Лагранжевом подходе ξ_k **= const**, k= 1,2,3 ,
И **индивидуальная** производная f по t есть просто **частная производная** по t :

$$\frac{df}{dt} = \left.\frac{\partial f(t,\xi)}{\partial t}\right|_{\xi_k = const}$$

При задании f по способу Эйлера, то есть когда $f = f(t, x_1, x_2, x_3)$,
Для **индивидуальной** точки коорд. x_i меняются со временем: $x_i = x_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, i = 1,2,3
Но f является *сложной функцией* времени: f зависит от t *и* x_i, а x_i зависят от t и ξ_k, k= 1,2,3
и **индивидуальная** производная вычисляется как производная сложной функции:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\left.\frac{\partial x_1}{\partial t}\right|_{\xi_k=\text{const}} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left.\frac{\partial x_2}{\partial t}\right|_{\xi_k=\text{const}} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\left.\frac{\partial x_3}{\partial t}\right|_{\xi_k=\text{const}}$$

производные x_i по времени от при постоянных ξ_k – это компоненты **скорости** частицы

$$\left.\frac{\partial x_1}{\partial t}\right|_{\xi_k=\text{const}} = \upsilon_1, \quad \left.\frac{\partial x_2}{\partial t}\right|_{\xi_k=\text{const}} = \upsilon_2, \quad \left.\frac{\partial x_3}{\partial t}\right|_{\xi_k=\text{const}} = \upsilon_3$$

Тогда выражение для индивидуальной производной при эйлеровом описании:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \upsilon_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \upsilon_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \upsilon_3\frac{\partial f}{\partial x_3} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\upsilon_k\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial t} + \upsilon_k\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Тут использовано *соглашение о суммировании* - Правило Эйнштейна: если в одночлене какой-то индекс повторяется дважды, то по этому индексу производится суммирование от 1 до 3, а знак суммы не пишется:

$$\upsilon_k\frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv \sum_{k=1}^{3}\upsilon_k\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

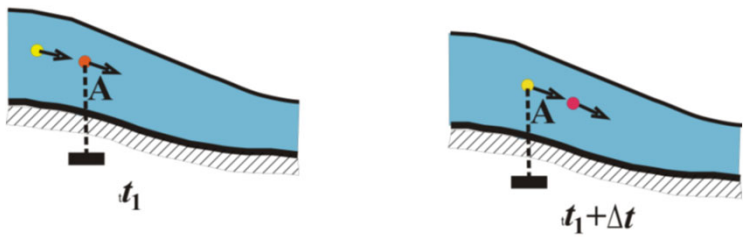
Физический смысл частной производной

$\frac{\partial f(t, x_k)}{\partial t}$ описывает изменение f со временем в фиксированной точке пространства; она называется локальной производной f по времени.

Если среда **движется**, то в рассматриваемой точке пространства в разные моменты времени находятся **разные индивидуальные** точки среды.

Приближенное значение $\frac{\partial f(t,x_k)}{\partial t}$ в точке A (фиксированной) в момент времени t_1 можно оценить как:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{\text{жёлт}}(t_1 + \Delta t, x_A) - f_{\text{красн}}(t_1, x_A)}{\Delta t}$$



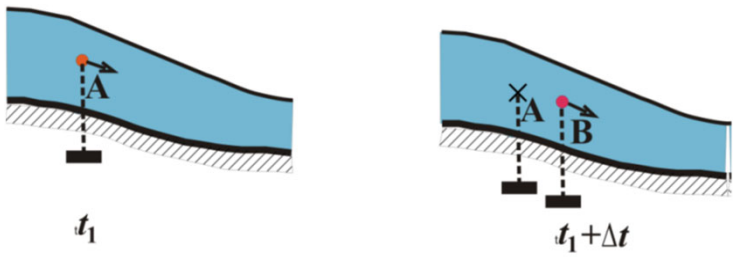
15

Физический смысл индивидуальной производной

$$\frac{df(t, x)}{dt}$$

Для измерения величины **индивидуальной** производной в данной точке A в момент времени t_1 надо измерить f при $t = t_1$ в той частице, которая находится в этот момент в точке A, затем в близкий момент $t_1 + \Delta t$ измерить f в той же самой индивидуальной частице (которая в этот момент находится уже не в точке A , а в точке B!) и разность полученных значений разделить на Δt :

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f_{\text{красн}}(t_1 + \Delta t, x_B) - f_{\text{красн}}(t_1, x_A)}{\Delta t}$$



16

Вычисление ускорений по скоростям

Ускорение $\vec{a}$ **индивидуальной** точки есть скорость изменения ее скорости со временем:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

Где $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ - **индивидуальная** производная скорости по времени

Если скорость задана по Лагранжу, то есть $\upsilon = \upsilon(t, \xi_k)$, то $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\partial \vec{\upsilon}(t, \xi_k)}{\partial t}$

Если скорость задана по Эйлеру, то есть $\upsilon = \upsilon(t, x_k)$, то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x_3}$$

Для проекций ускорения на координатные оси декартовой системы (компонент вектора $\vec{a}$):

x_1, x_2, x_3

$$a_1 = \frac{d\upsilon_1}{dt} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_3}$$

$$a_2 = \frac{d\upsilon_2}{dt} = \frac{\partial \upsilon_2}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_3}$$

$$a_3 = \frac{d\upsilon_3}{dt} = \frac{\partial \upsilon_3}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}$$

x, y, z

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{\partial \upsilon_y}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}$$

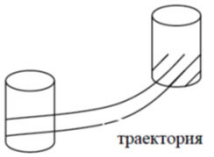
Линии тока и траектории

Линия тока – это линия, которая определяется для фиксированного момента времени t и обладает тем свойством, что **в каждой её точке** направление касательной совпадает с направлением **вектора скорости** среды.
Т.е. рассматриваем скорости **разных** частиц **в один и тот же** момент времени.

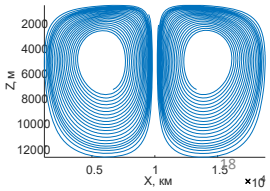
Линия тока

Траектория – это путь индивидуальной частицы; в каждой точке траектории направление касательной к траектории совпадает с направлением вектора скорости точки.
Т.е. рассматривается скорость **одной и той же** частицы **в разные моменты** времени.

Пример: Поступательное движение цилиндра по криволинейной траектории.



Линии тока в каждый момент времени – параллельные прямые. Траектории всех частиц – криволинейные



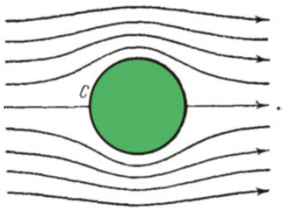
Установившееся и неустановившееся движение

Движение называется **установившимся или стационарным**, если в каждой точке пространства, через которое движется среда, все характеристики происходящих процессов не меняются со временем.

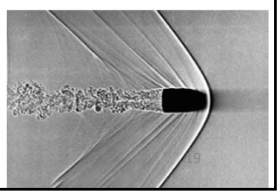
Тогда при **эйлеровом** описании в установившемся движении **частные** производные по времени от всех параметров при постоянных пространственных координатах равны нулю: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \ldots$

Часто (но не всегда !) при **неизменных** внешних условиях движение является установившимся.

Индивидуальные производные по времени при установившемся движении **могут быть отличны от нуля**. Например, при обтекании тел жидкостью с постоянной скоростью движение установившееся, но ускорение частиц не равно нулю: при подходе к телу частицы тормозятся, меняют направление своего движения, потом разгоняются и так далее.



Понятие стационарности **относительно**. Например, в системе отсчета, связанной с летящим с постоянной скоростью телом, параметры воздуха вокруг тела не зависят от времени, движение воздуха установившееся. В системе отсчета, связанной с землей, это же движение является неустановившимся



Литература

Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.1, Т.2.
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/continuous.htm

Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред. М., 2010.
http://gidropraktikum.narod.ru/Eglit-OMSS.djvu

При подготовке презентаций использованы материалы лекций проф. Эглит М.Э. (мехмат МГУ)