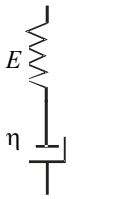
Динамика прогибания упруго-вязкой литосферы под действием нагрузки

Модель упруго-вязкой среды (тело Максвелла)

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

E – упругий модуль,
η – вязкий модуль



Тело Максвелла

Под действием постоянного напряжения

$\sigma = \sigma_0 = \text{const}$

$$\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_B = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)$$

Под действием постоянной деформации

$\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$

$$0 = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E e^{-t/\tau}$$

$\tau = \eta/E$ – *время релаксации* упругих напряжений

Релаксация упругих напряжений в теле Максвелла

30

Поведение тела Максвелла на «больших» и «малых» временах воздействия

(по сравнению с временем релаксации τ)

- **малые времена $t \ll \tau$** (быстрое воздействие). Тогда $t/\tau \ll 1$

  $\varepsilon_{t\to 0} = \sigma_0/E$ - соотношение для упругого тела (тело Гука).

  При малых временах воздействия тело Максвелла ведет себя как **упругое тело**.

- **большие времена $t \gg \tau$** (медленное воздействие). Тогда $t/\tau \gg 1$

  $\varepsilon|_{t\to\infty} \approx \frac{\sigma_0}{E}\frac{t}{\tau}$ или $\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\eta}$ - соотношение для вязкого тела (тело Ньютона). При больших временах воздействия тело Максвелла ведет себя как **вязкая жидкость.**

Похоже на вещество Земли (качественно)

31

Уравнение изгиба упруго-вязкой литосферы

$$D\frac{\partial^4 \dot{w}}{\partial x^4} + \rho_m g\left(\dot{w} + \frac{w}{\tau}\right) = \rho_c g\left(\dot{H} + \frac{H}{\tau}\right)$$ (Надаи, 1962, Т.2)

где $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}; \dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t}$; $\tau = \eta/E$

или $$D\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \rho_m g\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{w}{\tau}\right) = \rho_c g\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{H}{\tau}\right)$$

будем полагать $\frac{\partial H}{\partial t} \approx 0$,

т.е. характерное время **образования** орогена << τ, и $H(x,t)=H(x)$ – не зависит от времени

$$D\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \rho_m g\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{w}{\tau}\right) = \rho_c g\frac{H}{\tau}$$ (26)

или $$D\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) + \rho_m g\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{w}{\tau}\right) = \rho_c g\frac{H}{\tau}$$ (26*)

32

Решение уравнения изгиба упруго-вязкой литосферы методом конечных разностей (МКР)

Представление уравнения изгиба литосферы в конечных разностях и сведение к СЛАУ

1. Дискретизация:

$x \in [-L/2, L/2] \rightarrow x_i,\ i = 1,\ldots,N,\ \Delta x = L/(N-1)$

$t \in [0, t_m] \rightarrow t_k,\ k = 0,\ldots,M,\ \Delta t = t_m/M$ t_m – максимальное время моделирования

$H(x,t) \rightarrow H_i^k = H(x_i,t_k),\ w(x,t) \rightarrow w_i^k = w(x_i,t_k)$

2. Конечно-разностные аналоги производных:

1-го порядка по t

$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{w_i^{k+1} - w_i^k}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) \approx \frac{1}{\Delta t}\left(\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)^{k+1} - \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)^{k}\right)$$

4-го порядка по x

в момент k: $$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \approx \frac{w_{i+2}^k - 4w_{i+1}^k + 6w_i^k - 4w_{i-1}^k + w_{i-2}^k}{(\Delta x)^4}$$

в момент $k+1$: $$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \approx \frac{w_{i+2}^{k+1} - 4w_{i+1}^{k+1} + 6w_i^{k+1} - 4w_{i-1}^{k+1} + w_{i-2}^{k+1}}{(\Delta x)^4}$$

33

3. Уравнение изгиба (26) в конечных разностях.

Для i-го узла сетки в k-й момент времени:

$$\frac{D}{\Delta t}\left(\frac{w_{i+2}^{k+1}-4w_{i+1}^{k+1}+6w_i^{k+1}-4w_{i-1}^{k+1}+w_{i-2}^{k+1}}{(\Delta x)^4} - \frac{w_{i+2}^{k}-4w_{i+1}^{k}+6w_i^{k}-4w_{i-1}^{k}+w_{i-2}^{k}}{(\Delta x)^4}\right) +$$

$$+\rho_m g\left(\frac{w_i^{k+1}-w_i^k}{\Delta t}+\frac{w_i^k}{\tau}\right)= \rho_c g\,\frac{H_i}{\tau}$$

где $i = 3,\ldots,N\text{-}2.$ **(27)**

граничные условия (на сетке) **:**

$w(-L/2) = 0 \rightarrow w_1 = 0$

$w(L/2) = 0 \rightarrow w_N = 0$

$\frac{dw}{dx}(-L/2) = 0 \rightarrow \frac{w_2 - w_1}{\Delta x} = 0,$ или $w_2 = 0$

$\frac{dw}{dx}(L/2) = 0 \rightarrow \frac{w_N - w_{N-1}}{\Delta x} = 0,$ или $w_{N-1} = 0$

34

Система алгебраических уравнений

Введем обозначения: $A_c = \frac{\rho_c g}{D}(\Delta x)^4; A_m = \frac{\rho_m g}{D}(\Delta x)^4$

СЛАУ в стандартном виде

$$\begin{cases} w_1^{k+1} = 0 \\ w_2^{k+1} = 0 \\ \cdots \\ w_{i-2}^{k+1} - 4w_{i-1}^{k+1} + (6 + A_m)w_i^{k+1} - 4w_{i+1}^{k+1} + w_{i+2}^{k+1} = A_c\frac{\Delta t}{\tau}H_i + w_{i-2}^k - 4w_{i-1}^k + \left(6 + \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)A_m\right)w_i^k - 4w_{i+1}^k + w_{i+2}^k \\ \cdots \\ w_{N-1}^{k+1} = 0 \\ w_N^{k+1} = 0 \end{cases}$$

(28)

Сначала решаем задачу для **упругой** литосферы, и используем это решение как **начальное** для дальнейшего решения для упруго-вязкой литосферы

Затем решаем систему (28) в цикле по времени $k = 0,\ldots,M\text{-}1,$ используя полученное на предыдущем шаге решение (w_i^k) как известное (в правой части)

Обозначим: $w_i^{k+1} \rightarrow w_i\ ;\ w_i^k \rightarrow w0_i$
и будем переприсваивать на каждом шаге по времени (чтобы обойтись без двумерных массивов)

35

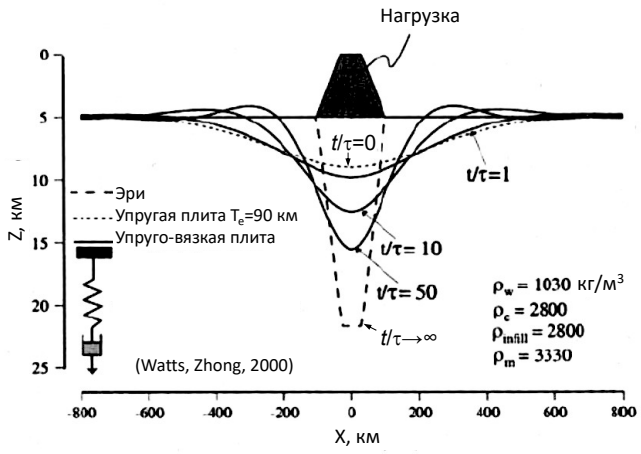
Алгоритм

1.Задать ν=0.25, E=70 ГПа, η= 10^{22}-10^{25} Па·с, T_e=70 км (варьир.)
2. L=1000 км, N=1000, t_m= 5 млн лет , M= 20, Δx=…, Δt=…
3. расчет D, A_c, A_m, λ^*, τ
4. решить задачу для упругой литосферы, берем решение как начальное $w0_i$
5. для моментов времени
$k = 0,\ldots,M\text{-}1$
4.1 Переприсвоить $w0_i = w_i$
4.2 Сформировать матрицу системы a_{ii} и правой части b_i
$i=1,\ldots,N$
если $i=1,2,N\text{-}1,N$
$a_{ii}=1;\ b_i=0$
иначе
$a_{ii}=6+A_m$
$a_{i,i-1}=-4;\ a_{i,i+1}=-4$
$a_{i,i-2}=1;\ a_{i,i,+2}=1$
$b_i=A_c\frac{\Delta t}{\tau}H_i + w0_{i-2} - 4w0_{i-1} + \left(6+\left(1-\frac{\Delta t}{\tau}\right)A_m\right)w0_i - 4w0_{i+1} + w0_{i+2}$
4.3 Решить систему (28), получить w_i
4.4 Найти $R_i = H_i - w_i$
4.5 Построить графики.

5.Варьировать ширину нагрузки λ, T_e, E, η, исследовать поведение модели в зависимости от **комбинации** этих параметров.

36

Динамика изгиба упруго-вязкой литосферы



Динамика прогибания:

- при t<<τ – как для упругой пластины,
- затем – релаксация упругих напряжений,
- при t >> τ – стремление к полной компенсации (по модели Эри)

37