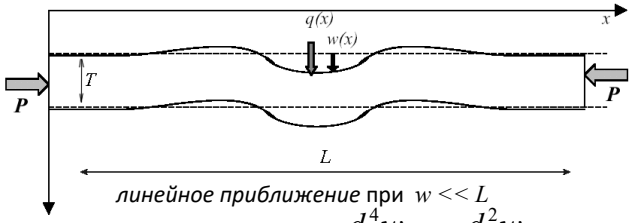
Модель региональной изостазии

Изгиб тонкой упругой пластины

$T << L$ закон Гука $\sigma = E\varepsilon$

ε– деформация
σ – напряжение
E – модуль Юнга



линейное приближение при $w << L$

Уравнение в случае **однородной** (D=const) пластины:

$$D\frac{d^4w}{dx^4} + P\frac{d^2w}{dx^2} = q(x) \qquad (4)$$

$F_y = q$

$q(x)$ – сила, действующая на единицу поверхности пластины, в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, P - горизонтальная сила, отнесенная к единице длины в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка

изгибная (цилиндрическая) **жесткость** :

$$D = \frac{ET^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (5)$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, T – толщина пластины

10

Прогибание упругой литосферы под весом орогена

Однородная литосфера (D=const)

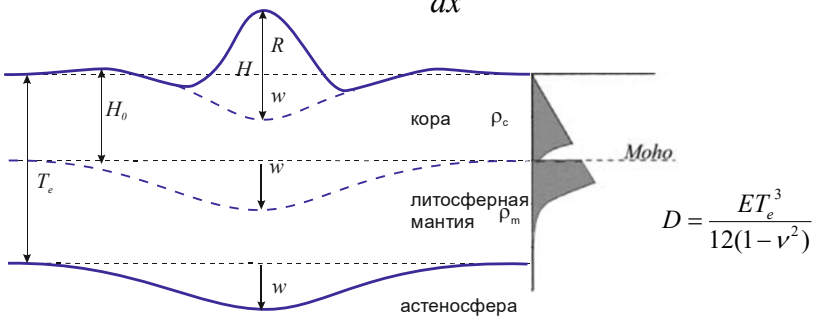
Отсутствие сжимающих сил (P=0)

$q(x) = \rho_c g H - \rho_m g w$

$$D\frac{d^4w}{dx^4} + \rho_m g w = \rho_c g H \qquad (6)$$

$F_y + F_A = F_T$

или $$D\frac{d^4w}{dx^4} + (\rho_m - \rho_c) g w = \rho_c g R \qquad (7)$$



$$D = \frac{ET_e^3}{12(1-\nu^2)}$$

T_e (EET) - *effective elastic thickness* – толщина **эквивалентной упругой пластины**, демонстрирующей сходное прогибание под приложенной нагрузкой, как «реальная» литосфера

11

Исследование уравнения

Граничные условия: $w(\pm L/2) = 0; \quad \frac{dw}{dx}(\pm L/2) = 0$ **(8)**

Исследование уравнения

Рассмотрим его решения при двух предельных случаях:

1. Малая изгибная жесткость ($D \to 0$)

$w = \rho_c/\rho_m H; R = (\rho_m - \rho_c)/\rho_m H,$ (локальная изостазия).

2. Большая изгибная жесткость ($D \to \infty$).

$w \to 0$ (нагрузка поддерживается за счет жесткости литосферы)

12

Методы решения дифференциальных уравнений

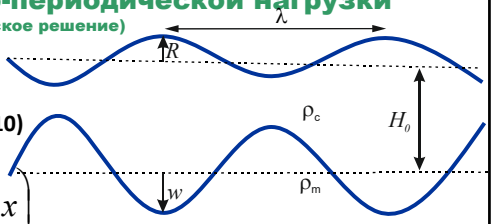
- К **точным** относятся методы, позволяющие аналитически выразить решение дифференциального уравнения через элементарные функции (либо представить при помощи квадратур от элементарных функций).
- **Приближенными** называются методы, в которых решение получатся как предел некоторой последовательности, каждый член которой выражается через элементарные функции.
- **Численные** методы - это алгоритмы вычисления приближенных значений искомого решения для дискретного набора значений аргумента.

13

Случай пространственно-периодической нагрузки

(аналитическое решение)

$$R(x) = R_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad (9)$$



$$D\frac{d^4w}{dx^4} + (\rho_m - \rho_c)gw = \rho_c g R_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad (10)$$

ищем решение в виде: $w(x) = w_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$

подставляя в (13) получаем: $$w_0 = \frac{\rho_c g R_0}{\Delta\rho g + D\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4} = \frac{\rho_c}{\Delta\rho} R_0 \frac{1}{1 + \frac{D}{g\Delta\rho}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4} \quad (11)$$

$\Delta\rho = \rho_m - \rho_c$

вводим $\lambda^* = 2\pi\left(\frac{D}{g\Delta\rho}\right)^{1/4}$ - **характерная длина волны** изгиба литосферы. (12)

$$w_0 = \frac{\rho_c}{\Delta\rho} R_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda^*}{\lambda}\right)^4} \quad (13)$$

Исследуем решение, рассмотрим два предельных случая:

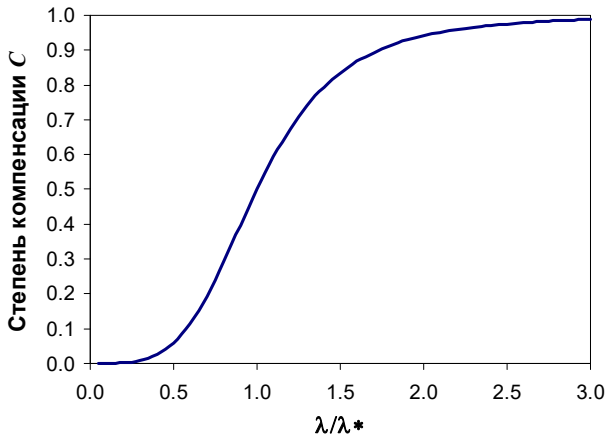
1. Нагрузка имеет малые пространственные размеры ($\lambda << \lambda^*$).
   $w_0 \approx 0$. Нагрузка удерживается за счет жесткости литосферы.
2. Нагрузка имеет большие пространственные размеры ($\lambda >> \lambda^*$).
   $w_0 \approx w_и = \rho_c / \Delta\rho R_0$, (локальная изостазия),

Появился масштаб длины: "малые" и "большие" пространственные размеры могут быть определены только **относительно собственной длины** волны изгиба литосферы λ^*

14

степень компенсации $$C = \frac{w_0(\lambda)}{w_и} = \frac{1}{1 + \left(\lambda^*/\lambda\right)^4}$$ где $w_и = \frac{\rho_c}{\Delta\rho} R$ (14)

Зависимость степени компенсации от длины волны нагрузки, отнесенной к характерной длине волны изгиба литосферы λ^*.



15

Понятие о приближенном решении с помощью разложения в ряд Фурье

для получения **приближенного** решение уравнения изгиба (8) для **произвольной** функции нагрузки

представим нагрузку $R(x)$ в виде гармонического ряда:

$$R(x) = \frac{R_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} R_{0k} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} x + \varphi_k\right) \qquad \textbf{(15)}$$

k = 1,2,…,N - номер гармоники, $\lambda_k = L/k$ - длина волны k – ой гармоники, L – размер области.

Решение для одной гармоники с длиной волны λ имеет вид (11) или (13)

Т.к. уравнения (7) линейное, то для него справедлив **принцип суперпозиции** (*решение для суммы факторов равно сумме решения для отдельных факторов*), и решение запишем в виде:

$$w(x) = \sum_{k=1}^{N} w_{0k} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} x + \varphi_k\right) \qquad \textbf{(16)}$$

где, аналогично (11). (12)

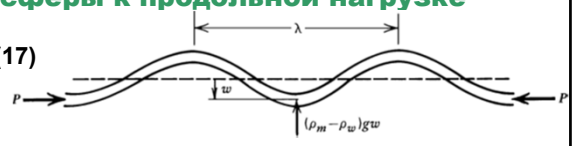
$$w_{0k} = \frac{\rho_c}{\Delta\rho} R_{0k} \frac{1}{1 + \frac{D}{g\Delta\rho}\left(\frac{2\pi}{\lambda_k}\right)^4} = \frac{\rho_c}{\Delta\rho} R_{0k} \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda^*}{\lambda_k}\right)^4} \qquad \textbf{(17)}$$

16

Устойчивость литосферы к продольной нагрузке

$$D\frac{d^4w}{dx^4} + P\frac{d^2w}{dx^2} + \Delta\rho g w = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

$\Delta\rho = \rho_m - \rho_w$



Ищем решение в виде $w(x) = w_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$. Тогда: $D\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 - P\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \Delta\rho g = 0$

По формуле для корней квадратного уравнения имеем: $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4\Delta\rho g D}}{2D}$

Длина волны деформированной литосферы будет вещественной при

$$P > P_{кр} = \sqrt{4Dg\Delta\rho}\,, \qquad \textbf{(18)}$$

где $P_{кр}$ –критическое значение горизонтальной нагрузки,

при превышении этого значения происходит потеря устойчивости (смятие в складки).

$$\lambda_{кр} = 2\pi\sqrt{\frac{2D}{P_{кр}}} = 2\pi\left(\frac{D}{g\Delta\rho}\right)^{1/4}. \qquad \textbf{(19)}$$

$P_{кр} = \sigma_{кр}\, h$ (на единицу длины в перпендикулярном направлении),

Оценки: для **океанской** литосферы мощностью 50 км $\sigma_{кр} \approx 6$ГПа, $\lambda_{кр} \approx 500$ км

для слоя толщиной 1 км $\sigma_{кр} \approx 900$МПа. $\lambda_{кр} \approx 30$ км.

17

Понятие о методе конечных разностей (МКР)

Дифференциальное уравнение (ДУ) в (частных) производных n-го порядка имеет общий вид:

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right) = 0$$

решение $u=u(x,y,t)$

Дифференциальное уравнение (обыкновенное) n-го порядка имеет общий вид:

$$F\left(u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nu}{dx^n}\right) = 0$$

решение $u=u(x)$

Этапы численного решения ДУ:

1. Дискретизация модельной области.
2. Представление производных в конечных разностях (КР).
3. Конечно-разностная аппроксимация ДУ и сведение к системе алгебраических уравнений.

18

1. Дискретизация модельной области

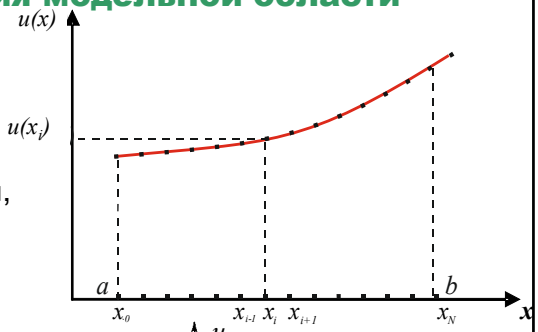
1D $u(x)$

$[a,b] \rightarrow x_1 \ldots x_i \ldots x_N$, $i = 1,\ldots,N$ – сетка

$\Delta x = (b - a) / (N - 1)$ – шаг сетки,
и $x_i = a + (i-1)\cdot\Delta x$

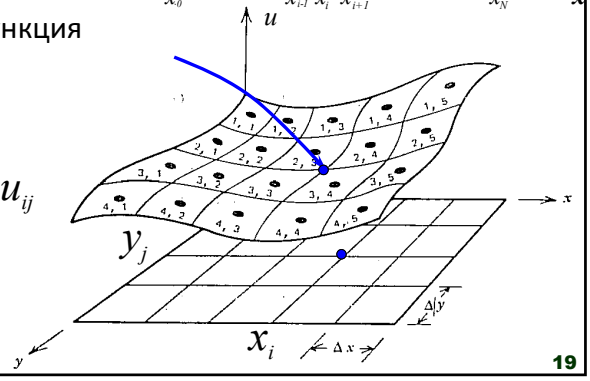
$u(x) \rightarrow u(x_i) = u_i$

– сеточная функция



2D $u(x,y)$

$u(x,y) \rightarrow u(x_i, y_j) = u_{ij}$



19

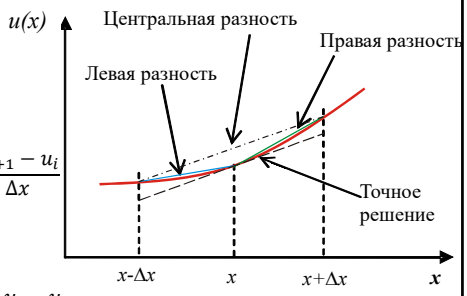
2. Представление производных в КР

Производная $\frac{du}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \approx \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$

заменяется отношением **конечных разностей**

погрешность аппроксимации

Конечно-разностный аналог (конечно-разностная апроксимация) производной **в узле сетки** x_i:



$$\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u(x_i+\Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

производная "вперед", или "справа"

$$\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u(x_i) - u(x_i-\Delta x)}{\Delta x} = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{\Delta x} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

производная "назад", или "слева"

$$\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u(x_i+\Delta x) - u(x_i-\Delta x)}{2\Delta x} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2\Delta x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

симметричная производная

20

Конечно-разностные аналоги производных высших порядков

Для производной 2-го порядка пользуются представлением производной "вперед" и "назад":

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) \approx \left[\frac{\frac{du}{dx}(x_i) - \frac{du}{dx}(x_{i-1})}{\Delta x}\right] \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{\Delta x}\right]$$

$$= \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{(\Delta x)^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Действуя аналогично

$$\frac{d^3u}{dx^3} \approx \frac{u_{i+2} - 3u_{i+1} + 3u_{i-1} - u_{i-2}}{2(\Delta x)^3}$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} \approx \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

погрешность аппроксимации $O((\Delta x)^2)$

21

3. Конечно-разностная аппроксимация ДУ

Подставляя конечно-разностные аппроксимации производных в исходное **дифференциальное** уравнение, получаем его *конечно-разностный аналог.* Разность между исходным ДУ и его конечно-разностным аналогом называется *погрешностью аппроксимации уравнения*

В результате конечно-разностной аппроксимации вместо исходного ДУ **получаем систему алгебраических уравнений (САУ)**

$$\Phi_i(x_i,y_i) = 0, \quad i = 1,\ldots,N,$$

куда в качестве уравнений входят также разностные *аналоги граничных условий,* и решаем ее.

22

Решение уравнения изгиба литосферы методом конечных разностей (МКР)

Представление уравнения изгиба литосферы в конечных разностях и сведение к СЛАУ

$$D\frac{d^4w}{dx^4} + \rho_m g w = \rho_c g H$$

1. дискретизация:

$x \in [-L/2, L/2] \rightarrow x_i,\ H(x) \rightarrow H_i = H(x_i),\ w(x) \rightarrow w_i = w(x_i),\ i = 1,\ldots,N,\ \Delta x = L/(N-1)$

2.Конечно-разностный аналог производной 4-го порядка:

$$\frac{d^4w}{dx^4} \approx \frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

3. Уравнение изгиба (7) в конечных разностях. Для i-го узла сетки имеем:

$$D\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{(\Delta x)^4} + \rho_m g w_i = \rho_c g H_i \qquad \textbf{(20)}$$

где $i = 3,\ldots,N-2$.

Получили систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), где $w_1,\ldots,w_N$ - неизвестные (N штук).
Однако самих уравнений всего N-4, т.е. система **недоопределена**.

23

граничные условия:

(на сетке)

$$w(-L/2) = 0 \rightarrow \quad w_1 = 0$$
$$w(L/2) = 0 \rightarrow \quad w_N = 0$$

$$\frac{dw}{dx}(-L/2) = 0 \rightarrow \frac{w_2 - w_1}{\Delta x} = 0, \qquad \text{или} \quad w_2 = 0 \qquad \textbf{(21)}$$

$$\frac{dw}{dx}(L/2) = 0 \rightarrow \frac{w_N - w_{N-1}}{\Delta x} = 0, \qquad \text{или} \quad w_{N-1} = 0$$

добавились 4 граничных условия, которые также **являются уравнениями** системы, т.е. стало N уравнений (система определена)

24

Система алгебраических уравнений

Введем обозначения: $A_c = \frac{\rho_c g}{D}(\Delta x)^4; A_m = \frac{\rho_m g}{D}(\Delta x)^4$ **(22)**

Запишем систему **в стандартном виде**

$$\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = 0 \\ w_1 - 4w_2 + (6 + A_m)w_3 - 4w_4 + w_5 = A_c H_3 \\ w_2 - 4w_3 + (6 + A_m)w_4 - 4w_5 + w_6 = A_c H_4 \\ \cdots \\ w_{i-2} - 4w_{i-1} + (6 + A_m)w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = A_c H_i \\ \cdots \\ w_{N-4} - 4w_{N-3} + (6 + A_m)w_{N-2} - 4w_{N-1} + w_N = A_c H_{N-2} \\ w_{N-1} = 0 \\ w_N = 0 \end{cases}$$

в матричной записи: $\mathbf{Ax=b}$,
где $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$ - матрица системы (i – номер строки, j – номер столбца,
$\mathbf{b}=\{b_i\}$ – вектор правых частей, $\mathbf{x}=\{x_i\}$ – вектор неизвестных **(23)**

Решение данной СЛАУ можно проводить любым подходящим методом (например, методом Гаусса)

25

Алгоритм

1. Задать D=10^{23}-10^{25} Н м (будем варьировать).
2. L=1000 км, N=1001, Δx=…
3. Вычисление A_c, A_m (по (20)), λ* (по (12))
4. Формирование матрицы системы a_{ii} и правой части b_i

$i=1,\ldots,N$

если $i=1,2,N\text{-}1,N$

$a_{ii}=1;\ b_i=0$

иначе

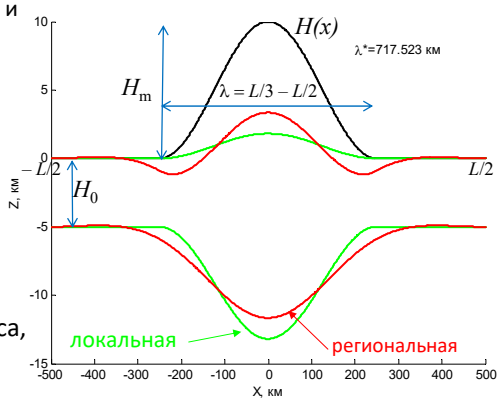
$a_{ii}=6+A_m$

$a_{i,i-1}=-4;\ a_{i,i+1}=-4$

$a_{i,i-2}=1;\ a_{i,i,+2}=1$

$b_i=A_c\ H_i$

5. Решение системы (21) методом Гаусса, получение w_i
6. нахождение $R_i = H_i - w_i$
7. Рисование графиков.
8. Варьирование ширины нагрузки λ и D, исследование поведения модели в зависимости от **комбинации** этих параметров.



26

Изгиб неоднородной литосферы

$$D = D(x) = \frac{ET_e^3(x)}{12(1-\nu^2)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[D(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right] + \rho_m w(x) = \rho_c g H(x) \qquad \textbf{(22)}$$

Решение уравнения изгиба в конечных разностях

дискретизация $D(x) \;\mapsto\; D_i = D(x_i).$

Представление производной в конечных разностях имеет вид:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D\frac{d^2w}{dx^2}\right) \approx \frac{1}{(\Delta x)^4}\left[D_{i+1}(w_{i+2}-2w_{i+1}+w_i) - 2D_i(w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}) + D_{i-1}(w_i-2w_{i-1}+w_{i-2})\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{(\Delta x)^4}\left[D_{i-1}w_{i-2} - 2(D_{i-1}+D_i)w_{i-1} + (D_{i-1}+4D_i+D_{i+1})w_i - 2(D_i+D_{i+1})w_{i+1} + D_{i+1}w_{i+2}\right]$$

D_0 – масштаб $D(x)$. Введем безразмерную переменную $d(x) = D(x)/D_0$

Например: $D(x) = D_0\,(1+\mathrm{Sin}(2\pi x/\Lambda))$

где Λ - длина волны изменения изгибной жесткости ($\Lambda = L \div 2L$)

или $D(x) = D_0 + D_1 \cdot x / L,$ где D_1- масштаб вариаций **(23)**

27

Система алгебраических уравнений

обозначим $$A_c = \frac{\rho_c g}{D_0}(\Delta x)^4; A_m = \frac{\rho_m g}{D_0}(\Delta x)^4$$ **(24)**

Запишем систему **в стандартном виде**

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 0 \\ d_{i-1}w_{i-2} - 2(d_{i-1}+d_i)w_{i-1} + (d_{i-1}+4d_i+d_{i+1}+A_m)w_i - 2(d_i+d_{i+1})w_{i+1} + d_{i+1}w_{i+2} = A_c H_i \\ \dots \\ w_{N-1} = 0 \\ w_N = 0. \end{cases}$$

(25)

Решение данной СЛАУ можно проводить любым подходящим методом (например, методом Гаусса)

28

Алгоритм

1.Задать D_0 =10^{24} Н м, D_1 = 3 D_0
2.L=1000 км, Λ = … , N=100, Δx=…
3.Задать массива d_i по (23)
4.рассчитать A_c, A_m (по (24))
5.Сформировать матрицу системы a_{ii} и правой части b_i

$i=0,\dots,N$

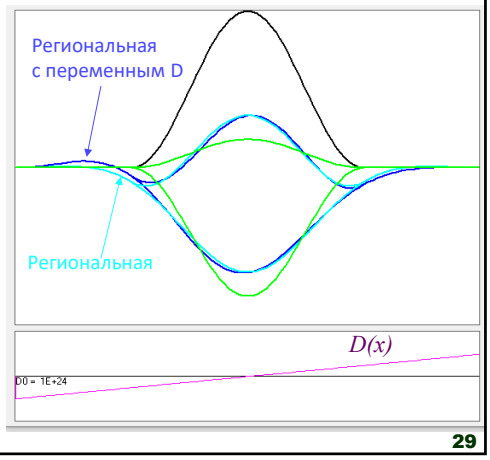
если $i=0,1,N\text{-}1,N$

$a_{ii}=1;\ b_i=0$

иначе

$a_{ii}=d_{i-1}+4d_i+d_{i+1}+A_m$
$a_{i,i-1}=-2(d_{i-1}+d_i);$
$a_{i,i+1}=-2(d_i+d_{i+1});$
$a_{i,i-2}=d_{i-1};\ a_{i,i,+2}=d_{i+1}$
$b_i=A_c$

5.Решить систему (25) методом Гаусса, получить w_i
6.Найти $R_i = H_i - w_i$
7.Построить графики.
8.Варьировать ширину нагрузки λ и D, исследовать поведение модели.



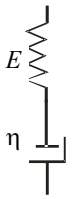
29

Динамика прогибания упруго-вязкой литосферы под действием нагрузки

Модель упруго-вязкой среды (тело Максвелла)

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

E – упругий модуль,
η – вязкий модуль



Тело Максвелла

Под действием постоянного напряжения

$\sigma = \sigma_0 = \text{const}$

$$\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_B = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)$$

Под действием постоянной деформации

$\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$

$$0 = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E e^{-t/\tau}$$

$\tau = \eta/E$ – *время релаксации* упругих напряжений

Релаксация упругих напряжений в теле Максвелла

30