Свойства тензора напряжений

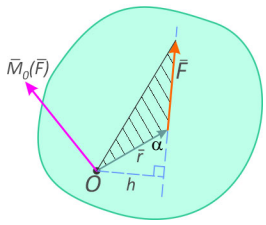
Тензор напряжений — симметричный

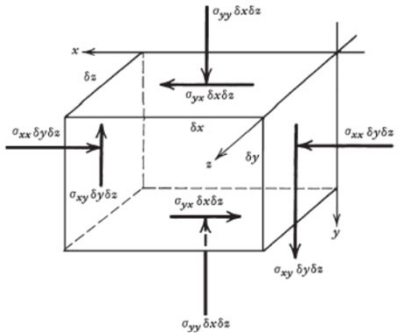
Напряжения в 2D (только по осям X и Y)

Моменты сил M_z (вращающие вокруг оси Z), действующие на грани (параллельные Z) со сторонами dx и dy.

Напоминание

Момент силы: $M = r \cdot F \cdot \sin(\alpha) = F \cdot h$





$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}]$ - векторное произведение

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r}\times\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix}\cdot\bar{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}\cdot\bar{k} =$$

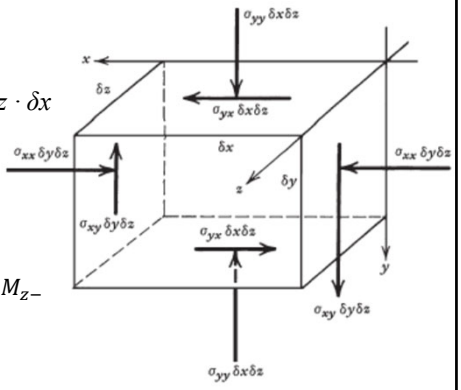
$$= (y\cdot F_z - z\cdot F_y)\cdot\bar{i} + (z\cdot F_x - x\cdot F_z)\cdot\bar{j} + (x\cdot F_y - y\cdot F_x)\cdot\bar{k}.$$

Двумерные напряжения (только по осям X и Y)

Моменты сил M_z (вращающие вокруг оси Z), действующие на грани (параллельные Z) со сторонами dx и dy.

Момент в направлении Z: $M_{z+} = \sigma_{yx}\delta x\delta z \cdot \delta y$

Момент направлении против Z: $M_{z-} = \sigma_{xy}\delta y\delta z \cdot \delta x$



В состоянии равновесия (вращения нет): $M_{z+} = M_{z-}$

$$\sigma_{yx}\delta x\delta z\cdot\delta y = \sigma_{xy}\delta y\delta z\cdot\delta x$$

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

В случае двумерных напряжений тензор может быть задан только **3-мя** числами (вместо 4х)

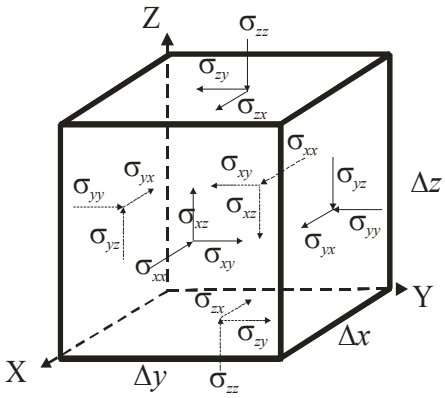
Аналогично для трехмерных напряжений: $\sigma_{32} = \sigma_{23}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$.

Тензор напряжений **симметричен**, то есть

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

В результате весь тензор напряжений может быть задан только **шестью** числами вместо девяти.

3D



Тензор напряжений

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

На диагонали (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}) - **нормальные** напряжения сжатия (растяжения), вне диагонали - **сдвиговые** напряжения σ_{ij}.

Часто сдвиговые напряжения обозначают τ_{ij}, чтобы подчеркнуть их касательный (*тангенциальный*) характер

Главные оси и главные напряжения

Определение напряжений на наклонных площадках

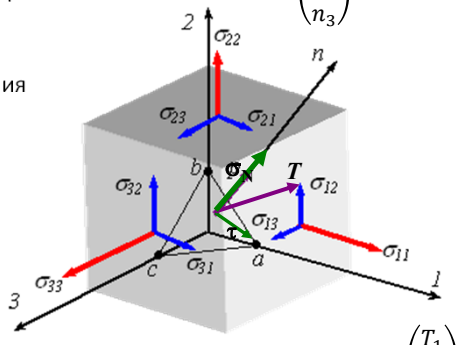
индексация координатных осей: $x - 1, y - 2, z - 3$

вектор направляющих косинусов внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к наклонной площадке *abc*

$$\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Матрица компонент напряженного состояния

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$



$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

компоненты вектора напряжения (тракции) $\boldsymbol{T}$ на наклонной площадке *abc* с нормалью $\boldsymbol{n}$ по координатным осям определятся из ф-лы Коши

$$\boldsymbol{T} = \sigma \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{или} \quad T_i = \sigma_{ji} n_j \quad \textbf{(3)}$$

или покомпонентно

$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 \\ T_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 \\ T_3 &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \quad \textbf{(4)}$$

Полное напряжение на площадке
Можно разложить на нормальную σ_N
и тангенциальную τ компоненты

$$T^2 = \sigma_N^2 + \tau^2$$

Нормальное напряжение на наклонной площадке *abc*
определится проекцией вектора полного напряжения на нормаль

$$\sigma_N = (T_1, T_2, T_3) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \sigma_N = \boldsymbol{T^T} \cdot \boldsymbol{n} \qquad \textbf{(5)}$$

$$\sigma_N = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 + 2\sigma_{13}n_1n_3 + 2\sigma_{23}n_2n_3 \qquad \textbf{(6)}$$

касательное напряжение на наклонной площадке *abc* определится из

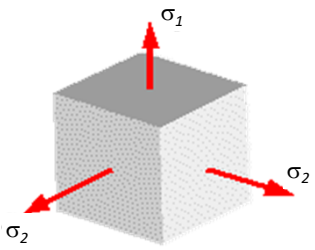
$$\tau = \sqrt{T^2 - \sigma_N^2} \qquad \textbf{(7)}$$

где $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}$ модуль вектора напряжения (тракции) **(8)**

Определение главных напряжений и главных площадок

Если по граням выделенного элементарного параллелепипеда действуют только **нормальные** напряжения, то они называются ***главными напряжениями***, а площадки, на которых они действуют, называются ***главными площадками***.
Можно доказать, что в каждой точке напряженного тела существуют **три главные** взаимно перпендикулярные площадки
Главные напряжения обозначают σ_1 , σ_2 , σ_3

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$



Если отличны от нуля все три главных напряжения, то напряженное состояние называется ***трехосным*** или ***объемным***.

Если равно нулю одно из главных напряжений, то напряженное состояние называется ***двухосным*** или ***плоским***.

Если равны нулю два главных напряжения, то напряженное состояние называется ***одноосным*** или ***линейным***.

Для определения главных напряжений предположим, что площадка *abc* является **главной** площадкой.
Тогда на ней будут действовать только **нормальные** напряжения, то есть главные напряжения будут равны полным напряжениям $\boldsymbol{T}$.
В этом случае компоненты вектора полного напряжения (T_1, T_2, T_3) можно рассматривать как проекции главных напряжений на оси координат, т.е. тракция T_i параллельна вектору нормали

$$T_i = \lambda n_i, \qquad \textbf{(9)}$$

где λ представляет одно из трёх **главных** напряжений, *i*=1,2,3

Подставив это условие в уравнение Коши (4), получим

$$(\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Он равен 0, если $i \neq j$, и равен 1, если $i = j$.

система линейных однородных уравнений относительно направляющих косинусов.
Три уравнения (10) содержат четыре неизвестных – величину главного напряжения λ и три направляющих косинуса n_i, определяющих направление **главных осей**.
Четвертое недостающее уравнение системы

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \qquad \textbf{(11)}$$

В силу этого соотношения направляющие косинусы не могут одновременно иметь нулевые значения.

Матричное уравнение имеет решение, если определитель, составленный из коэффициентов системы (10), равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \textbf{(12)}$$

Это приводит к характеристическому уравнению третьей степени относительно λ:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

где коэффициенты

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \qquad \textbf{(14)}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(15)}$$

или $I_2 = \sigma_{11}\cdot\sigma_{22} + \sigma_{22}\cdot\sigma_{33} + \sigma_{33}\cdot\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(16)}$$

или $I_3 = \sigma_{11}\cdot\sigma_{22}\cdot\sigma_{33} + 2\cdot\sigma_{12}\cdot\sigma_{23}\cdot\sigma_{13} - \sigma_{11}\cdot\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\cdot\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\cdot\sigma_{12}^2$

- инварианты напряженного состояния в точке, так как они не изменяют своей величины при изменении направления исходной системы прямоугольных координат

Существуют **три действительных** корня уравнения (13) $\lambda_{1,2,3} = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, которые и являются значениями **трех главных напряжений**.

Каждому главному напряжению соответствует **главная ось**, для которой направляющие косинусы находятся как решения уравнений (10).
Так как число главных площадок равно трем, должно быть найдено **девять** направляющих косинусов, описывающих ориентацию нормалей к ним относительно осей координат.

Например, чтобы найти, направляющие косинусы $n_1^{(i)}$, $n_2^{(i)}$, $n_3^{(i)}$ нормали к площадке, по которой действует главное напряжение σ_i, надо подставить его значение в **два** уравнения (10).
Так, развернутая форма (10) для **второй** главной оси (σ_2)такова:

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{11} - \sigma_{(2)})\, n_1^{(2)} + \sigma_{12} n_2^{(2)} + \sigma_{13} n_3^{(2)} = 0,\\
&\sigma_{21} n_1^{(2)} + (\sigma_{22} - \sigma_{(2)})\, n_2^{(2)} + \sigma_{23} n_3^{(2)} = 0,\\
&\sigma_{31} n_1^{(2)} + \sigma_{32} n_2^{(2)} + (\sigma_{33} - \sigma_{(2)})\, n_3^{(2)} = 0.
\end{aligned} \qquad \textbf{(17)}$$

+ уравнение (11) для направляющих косинусов

Решив эти два уравнения, найдем значения двух направляющих косинусов, например $n_1^{(2)}$, $n_2^{(2)}$, выраженные через $n_3^{(2)}$.
Подставив найденные значения $n_1^{(2)}$, $n_2^{(2)}$ в уравнение (11), найдем третий направляющий косинус $n_3^{(2)}$ второй главной площадки.

Максимальные сдвиговые напряжения

$$\tau^2 = T^2 - \sigma_N^2$$

В главной системе координат недиагональные элементы тензора напряжений σ_{ij} = 0, и из (6) следует

$$\tau^2 = \underbrace{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2}_{T^2} - \underbrace{(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2}_{\sigma_N^2} \qquad \textbf{(18)}$$

Максимальное и минимальное значения τ можно получить из (18) из условий

$$\frac{\partial(\tau^2)}{\partial n_2} = 0; \frac{\partial(\tau^2)}{\partial n_3} = 0 \qquad \text{с учетом} \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

В результате получаются два типа стационарных решений.
1. **Главные площадки**:

$$n = (1,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,1),$$

для них $\tau = 0$. Это минимумы τ.
2. **Площадки, нормаль которых делит пополам угол между двумя главными осями**, например между осями 1 и 2:

$$n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad n_3 = 0.$$

Подставим это в (18):

$$\tau^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4}.$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}.$$

Аналогично для пар осей $(1,3)$ и $(2,3)$:

$$\tau = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \qquad \tau = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}.$$

Получаются три выражения для $\tau_{\max}$:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \qquad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \qquad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \tag{19}$$

если брать положительные разности. В общем случае пишут модули:

$$\tau_{ij} = \frac{|\sigma_i - \sigma_j|}{2}.$$

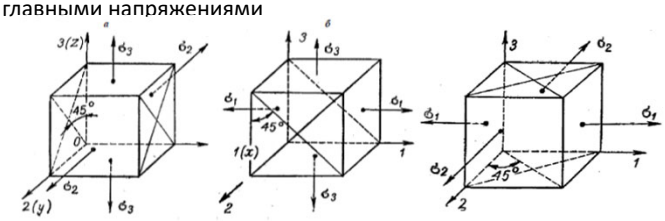
Если главные напряжения упорядочены, например

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

то **наибольшее** касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{19*}$$

Максимальные ($\tau_{\max}$) действует на площадке, нормаль которой составляет 45° с направлениями σ_1 и σ_3, то есть делит пополам прямой угол между максимальным и минимальным главными напряжениями



Напоминание: определитель матрицы

2 X 2 $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$

$$|A| = det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}.$$

3 X 3 $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$

алгебраическое дополнение элемента определителя $\quad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$

M_{ij} - *Минор элемента определителя* например $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} M_{12} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} M_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Задания

Задача 1

Тензор напряжений:

$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$. (МПа)

Найти главные напряжения, главные оси и $\tau_{\max}$.

Задача 2

Тензор напряжений:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 60 & 20 & 0 \\ 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \text{(МПа)}$$

Найти главные напряжения, направления главных осей и $\tau_{\max}$.