# Уравнения Лапласа и Пуассона

## Уравнение для гравитационного потенциала:

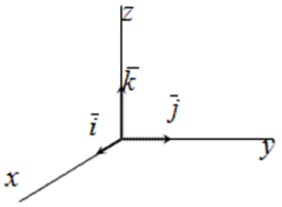
$\nabla^2\Phi = \Delta\Phi = -4\pi G\rho$ внутри гравитирующего тела (**уравнение Пуассона**)

$\nabla^2\Phi = \Delta\Phi = 0$ вне тела (**уравнение Лапласа**)

$\Phi$ – **гравитационный потенциал** (=потенциальная энергия тела ед. массы, Дж/кг)
$G$ = 6.672·10$^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$ - гравитационная постоянная
$\rho$ – плотность

ускорение силы тяжести:
$\mathbf{g} = -\mathit{grad}\,\Phi$ или $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$

$$\mathbf{g} = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$




**2D уравнение Пуассона:**

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = A = \text{const} \qquad (1)$$

+ граничные условия

# Дискретизация

**уравнение Пуассона**

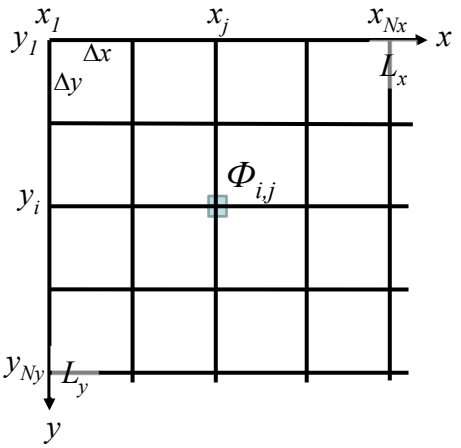
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = A = \text{const}$$

$x \in [0, L_x],\ y \in [0, L_y]$

$x \to x_j, \quad j = 1, \ldots, N_x$
$y \to y_i, \quad i = 1, \ldots, N_y$
(как в матрице: $i$ – строки, $j$ – столбцы)

$N_x$ и $N_y$ - количество точек разбиения по оси $X$ и $Y$

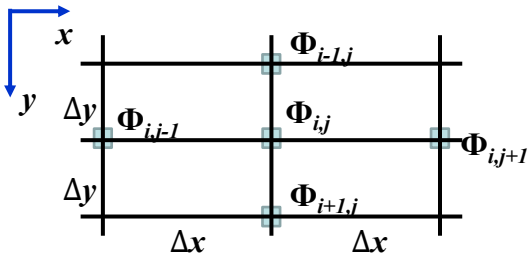
*Равномерная* сетка с шагами
$\Delta x = L_x/N_x$ ; $\Delta y = L_y/N_y$,




$$\Phi(x,y) \to \Phi(x_j, y_i) = \Phi_{i,j}$$

## Конечно-разностные аппроксимации производных

Для частных производных 2-го порядка по координате $\Phi_{i,j}$ представление на сетке:




$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \approx \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \approx \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{(\Delta y)^2}$$

## Конечно-разностное представление уравнения:

$$\frac{\Phi_{i,j+1}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{i+1,j}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i-1,j}}{(\Delta y)^2} = A$$

$j=2,\ldots,N_x$-1
$i=2,\ldots,N_y$-1

+ **граничные условия**
1-го рода: на границе $\Phi=\text{const}\ (=\Phi_b)$
или
2-го рода: на границе $d\Phi/dx=const$
или
смешанные

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}\left(\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}\right) + \frac{1}{(\Delta y)^2}\left(\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}\right) = A$$

или

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}\Phi_{i,j+1} + \frac{1}{(\Delta x)^2}\Phi_{i,j-1} - 2\left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right)\Phi_{i,j} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\Phi_{i+1,j} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\Phi_{i-1,j} = A$$

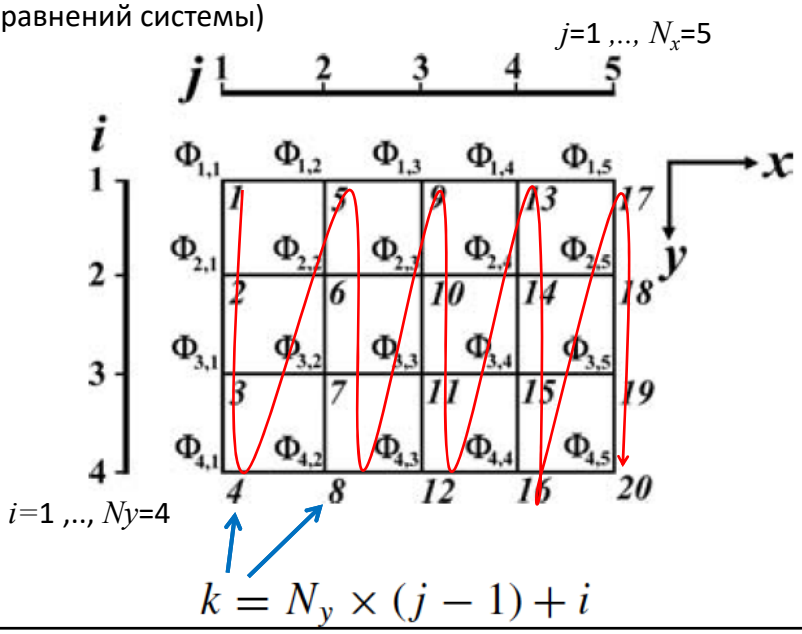
Нужно свести к СЛАУ (матричному уравнению) вида:

$$L\Phi=R$$

L – матрица коэффициентов, R – вектор правой части

необходимо ввести **глобальный индекс**:

переход от индексов $i,j$ к **общей сквозной** нумерации переменных (и уравнений системы)




$j$=1 ,.., $N_x$=5

$i$=1 ,.., $Ny$=4

$$k = N_y \times (j-1) + i$$

## Сведение к СЛАУ

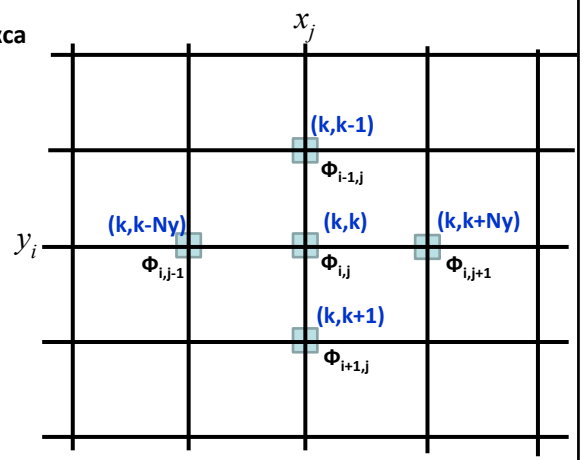
**Присвоение глобального индекса**

Матричное уравнение:

$$L\Phi = R$$

$\Phi_{i,j} \leftrightarrow s_k$ ⇩ записать уравнения через глобальный индекс **k**

$$Ls = R$$




$$\frac{1}{(\Delta x)^2}\Phi_{i,j-1} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\Phi_{i-1,j} - 2\left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right)\Phi_{i,j} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\Phi_{i+1,j} + \frac{1}{(\Delta x)^2}\Phi_{i,j+1} = A$$

$L_{k,k-Ny}\ s_{k-Ny}$ $L_{k,k-1}\ s_{k-1}$ $L_{k,k}$ $s_k$ $L_{k,k+1}\ s_{k+1}$ $L_{k,k+Ny}\ s_{k+Ny}$ $R_k$

## Сведение к СЛАУ

$$Ls=R$$

**Элементы матрицы (массива коэффициентов ур-ий):**

**Во внутренних узлах**

**Левая часть:**

$$L(k,k) = -2\left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right)$$

$$L(k,k\text{-}1) = \frac{1}{(\Delta y)^2}$$

$$L(k,k+1) = \frac{1}{(\Delta y)^2}$$

$$L(k,k\text{-}Ny) = \frac{1}{(\Delta x)^2}$$

$$L(k,k+Ny) = \frac{1}{(\Delta x)^2}$$

**Правая часть:**

$$R(k) = A$$

**На границах:**

Постоянные условия: $1 \cdot \Phi_{i,j} = \Phi_b$

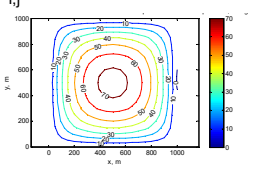
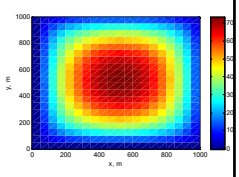
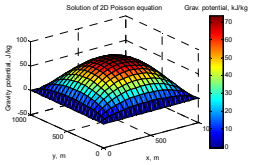
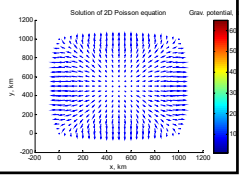
$L_{k,k}$ $s_k$ $R_k$

**Левая часть:**

$$L(k,k)=1$$

**Правая часть:**

$$R(k)= \Phi_b$$

## Алгоритм

1. Задание параметров модели
2. основной цикл по узлам сетки
   $j=1,\ldots,N_x$;
   $i=1,\ldots,N_y$
   вычисляем глобальный индекс k
   формируем матрицу системы (на границах и во внутренних узлах отдельно)
3. решаем матричное ур-ие (→решение $s_k$ с глобальным индексом)
4. пересчет из глобального индекса в узлы сетки
   $j=1,\ldots,N_x$;
   $i=1,\ldots,N_y$
   вычисляем глоб. индекс k
   присваиваем $s_k$ в массив $\Phi_{i,j}$
5. рисуем $\Phi_{i,j}$