Некоторые методы решения СЛАУ.

Одна из задач, часто встречающихся в научных вычислениях – решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Оно часто применяется при реализации многих методов вычислительной математики, при обработке результатов экспериментальных данных.

1. Стандартная запись СЛАУ.

Рассмотрим СЛАУ вида

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + ... + a_{0N}x_N = b_0 \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad . \quad . \\ a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 .. + a_{ii}x_i + .. + a_{iN}x_N = b_i \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad . \quad . \\ a_{N0}x_0 \quad a_{N1}x_1 + ... \quad a_{NN}x_N = b_N \end{cases}, \qquad (1)$$

или, в матричной записи

Ax=b,

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & ... & a_{0N} \\ . & . & . & . \\ a_{i0} & a_{i1} & ...a_{ii} & ... & a_{iN} \\ . & . & . & . \\ a_{N0} & a_{N1} & .... & a_{NN} \end{pmatrix}$ - матрица системы,

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ ... \\ x_i \\ ... \\ x_N \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ ... \\ b_i \\ ... \\ b_N \end{pmatrix}$ – вектор правых частей.

Метод решения задачи называют *прямым*, если он позволяет получить решение после выполнения заранее известного конечного числа элементарных операций. Решение будет *точным*, если все операции будут выполняться без погрешностей. Метод решения задачи называют *итерационным*, если в результате получают бесконечную последовательность приближений к решению. Если эта последовательность стремится к решению задачи, то говорят, что итерационный процесс *сходится.* К прямым методам решения относятся *метод Гаусса* и его модификация – *метод прогонки*. К итерационным методам решения относятся

метод *простых итераций* и метод *Зайделя*. Для систем с плохо обусловленной матрицей (у которых $\det \mathbf{A} \approx 0$) разработаны специальные методы решения.

2. Метод Гаусса (метод последовательного исключения)

Метод Гаусса - прямой метод. Он основан на приведении матрицы системы к *треугольному* виду, т.е. такому, что коэффициенты a_{ij}, находящиеся ниже главной диагонали, были равны 0. Это достигается последовательным выражением из i-го уравнения системы неизвестного x_i и подстановкой в следующие уравнения. Тогда для последнего неизвестного x_N получаем искомое решение. Затем путем обратной подстановки выражаются остальные неизвестные $x_{N-1},..,x_0$ системы.

Таким образом, алгоритм метода состоит из двух этапов.

1) Первый этап называется *прямым ходом* (приведение матрицы к треугольному виду). При этом выполняются следующие шаги
   1. Пусть $i=0$.
   2. Следует проверить, отлично ли a_{ii} от 0. Если да, то i-я строка становится *рабочей строкой*.

      Если нет, то меняем i-ю строку на l-ю ($l > i$), в которой $a_{li} \neq 0$:

      $l = i+1,\ldots,N$

      если $a_{li} \neq 0$, то для $k=0,\ldots N$

      $R= a_{lk}$, $a_{lk} = a_{ik}$, $a_{ik} = R$.

      $R= b_l$, $b_l = b_i$, $b_i = R$.
   3. Для $j = i + 1, i + 2,\ldots,N$ вычисляем новые матричные элементы

      $a^*_{jk}=0$, для $k = i$,

      $a^*_{jk} = a_{jk} + q_j\, a_{ik}$, для $k =i+1,i+2,\ldots,N$,

      где $q_j = -a_{ji} / a_{ii;}$

      аналогично представляем новые правые части уравнений

      $b^*_j = b_j + q_j\, b_i$
   4. Увеличиваем i на 1 и повторяем пп.2,3, так, что $i=0,\ldots,N-1$.

   В итоге получаем верхнюю треугольную матрицу, т.е. такую, у которой все элементы ниже диагонали равны 0.

2) Второй этап - *обратный ход* (последовательное нахождение $x_{N-1}, x_{N-2,\ldots}, x_1, x_0$)

   $x_N = b^*_N / a^*_{NN}$.

   1. Для $i = N - 1, N - 2,\ldots,0$

$$x_i = \frac{1}{a^*_{ii}}\left(b^*_i - \sum_{k=i+1}^{N} a^*_{ik} x_k \right)$$

Следует отметить, что решающее значение для точности вычислений имеет величина a_{ii}, на которую производится деление. Для увеличения точности следует таким образом переставить строки системы, чтобы диагональный элемент имел наибольшую по модулю величину из всех других элементов данной строки.

3. Метод прогонки (для систем с трехдиагональной матрицей)

Матрица вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & a_{i,i-1} & a_{ii} & a_{i,i+1} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{pmatrix},$$

в которой отличны от нуля только элементы, стоящие на главной диагонали ($a_{ii} \neq 0$), и двух соседних диагоналях ($a_{i,i-1} \neq 0$, $a_{i,i+1} \neq 0$), называется *трехдиагональной*. Такие системы часто возникают при численном решении краевых задач для дифференциальных уравнений.

Метод *прогонки*, применяемый к системам с трёхдиагональной матрицей, является частным случаем метода Гаусса. Трёхдиагональная система обычно записывается в каноническом виде

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \,,\ i = 0,\ldots,N,$$

$$a_0 = 0,\ c_N = 0,$$

или, в матричной форме

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & a_i & b_i & c_i & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_N & b_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \\ x_i \\ \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \\ d_i \\ \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2)}$$

Для нахождения решения этой системы преобразуем её к эквивалентному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_i & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \\ x_i \\ \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \\ \beta_i \\ \\ \beta_{N-1} \\ \beta_N \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(3)}$$

где

$$\alpha_0 = c_0 \big/ b_0, \quad \beta_0 = d_0 \big/ b_0,$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{c_{i+1}}{b_{i+1} - a_{i+1}\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{d_{i+1} - a_{i+1}\beta_i}{b_{i+1} - a_{i+1}\alpha_i}, \quad i = 0,....., N-1.$$

Т.е. сначала к каждой $i+1$ –ой строке прибавляется i-я, умноженная на $-a_{i+1}$, чтобы ниже главной диагонали получились 0, а затем все делится на величину, полученную для главной диагонали, чтобы затем на главной диагонали получилось 1. Это соответствует *прямому ходу* в методе Гаусса.

Решение системы (3) находится последовательно снизу вверх (*обратный ход*):

$x_N = \beta_N$

$x_i = \beta_i - \alpha_i x_{i+1}$, $i=N-1,\ldots,0$

Возможны и другие варианты записи метода прогонки.