(Механические) напряжения

Тензор напряжений

Общие понятия

Геофизики изучают такие явления, как сейсмичность, тектоника плит и медленное течение пород и минералов, называемое ползучестью. Один из способов изучения этих явлений — исследование деформации и течения материалов Земли. Наука о деформации и течении материалов называется **реологией**.

Основные понятия МСС и реологии — **напряжение** и **деформация**.

(Механическое) напряжение — это динамическая характеристика, выражающая величину сил, действующих внутри или на поверхности сплошных сред,

Деформация — кинематическая величина, выражающая деформацию (изменение формы) среды.

В этой лекции вводятся основные понятия **напряжения**. Объясняется, как полностью описать напряжённое состояние объекта в трёхмерной системе координат и как при необходимости изменить систему координат. Также описывается, как найти напряжение на произвольной плоскости внутри объекта

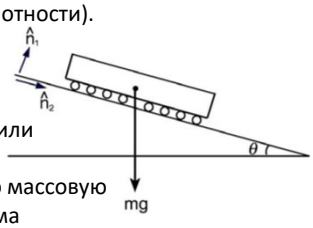
Поверхностные и массовые (объёмные) силы

1. Массовые (объёмные) силы

Действуют на каждую частицу (каждый элемент массы или объёма) внутри всего рассматриваемого тела или жидкости. Величина такой силы пропорциональна массе (или объёму при постоянной плотности).

Примеры:

- Сила тяжести (гравитация).
- Силы инерции (например, при ускоренном движении).
- Электромагнитные силы (если среда обладает зарядом или находится в поле).



- **Единицы измерения:** В расчетах часто используют **удельную** массовую силу — силу, отнесенную к единице массы или единице объёма

2. Поверхностные силы

Действуют непосредственно на внешнюю поверхность, которая ограничивает данный объём или тело. Они возникают из-за механического соприкосновения тел или взаимодействия молекул на границе. Их величина пропорциональна площади поверхности.

- **Примеры:**
  - Силы гидростатического или аэродинамического давления (давление жидкости или газа на стенки сосуда).
  - Силы трения на поверхности.
  - Силы поверхностного натяжения.

Поверхностные силы (тракции)

Сила $\bar{F}$**,** действующая равномерно на плоскую поверхность площадью A, создаёт **поверхностную силу** (***тракцию***, *traction)* $\bar{T}$ величиной

$$\bar{T} = \frac{\bar{F}}{A}.$$

Тракция — это вектор, имеющий то же направление, что и $\bar{F}$, и имеющий размерность давления. В единицах СИ тракции измеряются в Н/м^2 или Па.

$$\bar{T} = \frac{\bar{F}}{A} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Поскольку **тракции** являются векторами, их можно разложить на компоненты, например на нормальную σ_n и касательную τ составляющие(по отношению к поверхности, на колторую они действуют).

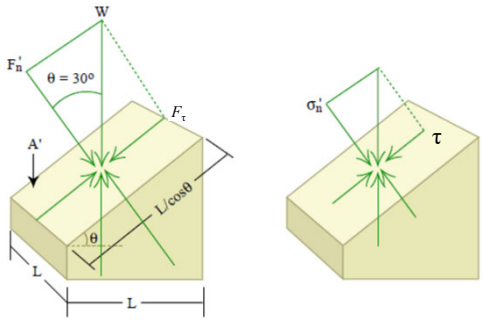
$$\vec{T} = \vec{T}_{\text{касат}} + \vec{T}_{\text{норм}},$$

$$\sigma_n = |\vec{T}_{\text{норм}}|, \qquad \tau = |\vec{T}_{\text{касат}}|.$$

Зависимость тракции от ориентации площадки, на которую она действует

Поскольку площадь часто меняется с ориентацией поверхности, значения σ_n и τ ведут себя иначе, чем компоненты вектора при изменении ориентации поверхности.

Ориентация поверхности и различия в разложение сил и тракций



$$|\vec{F}_n| = W \cdot \cos\theta, \qquad \sigma_n = W \cdot \cos^2\theta / L^2,$$
$$|\vec{F}_\tau| = W \cdot \sin\theta, \qquad \tau = W \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta / L^2.$$

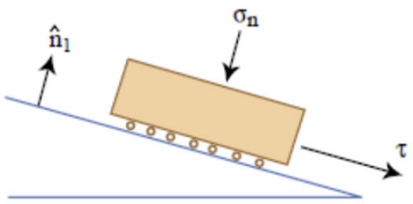
Закон Адмонтона

Закон Адмонтона связывает нормальную и касательную силы через коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом статического трения f_s.

$$F_{\text{касат}} = f_s \cdot F_{\text{норм}}.$$

Разделив обе стороны уравнения на площадь A, получаем закон Адмонтона в терминах тракций:

$$\tau = f_s \cdot \sigma_n$$



закон Адмонтона выражает критерий устойчивости (разрушения). Когда касательная сила больше произведения нормальной силы и *fs*

$$\tau > f_s \cdot \sigma_n.$$

блок будет скользить вниз по наклонной плоскости.

(**Применение**: устойчивость склонов к оползням и лавинам, подвижки по разломам и генерация землетрясений)

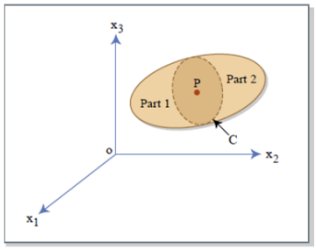
Поверхностные силы (тракции) в точке

понятие поверхностной силы в точке чрезвычайно важно, поскольку позволяет находить поверхностную силу на произвольной плоскости, т.е. в пределе при $\delta S \to 0$.

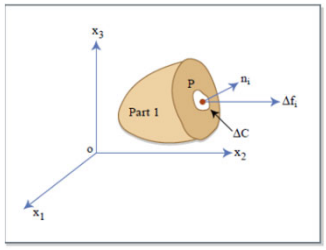
Назовём ограничивающую поверхность S, объём V, секущую плоскость через тело C.

Нормаль к плоскости C — $(\hat{n})$. P — точка на C, окружённая малым элементом ΔC.

Часть 1 тела действует внутренними силами на часть 2 и создаёт силу, действующую на ΔC, называемую Δf.



Свободное тело и секущая плоскость



Сила Δf на элементе ΔC.

Принцип напряжений Коши: что когда площадь вокруг P стремится к нулю, выполняется следующий предел:

$$\lim_{\Delta C \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta C} = T^{(\hat{n})}.$$

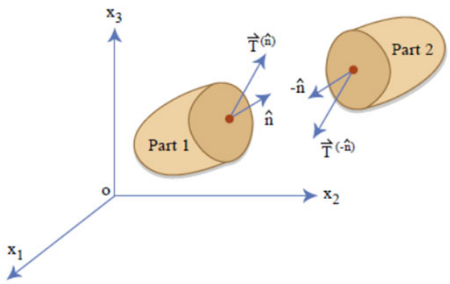
$T^{(\hat{n})}$ называется тракцией или **вектором напряжений в точке** P.

$(\hat{n})$ показывает, что этот вектор напряжений определён только для **конкретной** плоскости, проходящей через P с вектором нормали $(\hat{n})$.

Законы Ньютона и тракция в точке

Третий закон Ньютона: что сила, действующая со стороны части 2 на часть 1, равна и противоположна силе, действующей со стороны части 1 на часть 2.

Тракции на противоположных сторонах разреза.



Можно показать, что аналогично для тракций

$$T^{(-\hat{n})} = -T^{(\hat{n})}.$$

Тензоры

Тензор — это математический объект, являющийся обобщением скаляра и вектора. Он не зависит от выбора системы координат (**базиса**), но его компоненты преобразуются по определенному закону при изменении СК

Большинство физических величин, важных в механике сплошных сред, таких как температура, сила и напряжение, могут быть представлены **тензором**.

Температура задаётся одним числовым значением, называемым **скаляром**, и является примером **тензора нулевого порядка**.

Сила определяется как величиной, так и направлением. Это вектор, или **тензор первого порядка**.

Задание **напряжения** ещё сложнее и требует указания величины и двух направлений — направления вектора силы и направления нормали к площадке, на которую действует сила. Напряжения представляются тензорами **второго порядка**.

Другие примеры – **тензоры** деформации, инерции, анизотропии,…

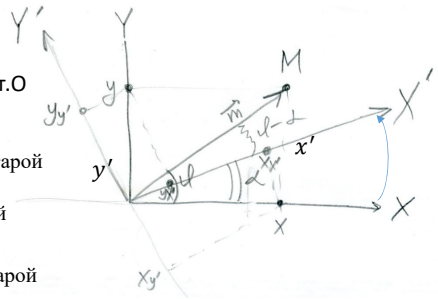
Пример: преобразование координат вектора при повороте системы координат на плоскости

Координаты точки M (вектора ***m***) в СК XOY

$x = m \cdot \cos(\varphi)$ (1)

$y = m \cdot \sin(\varphi)$,

СК X'OY', повернутая относительно XOY на угол α т.O



Находим координаты т.M в новой СК

$x_{x'} = x \cdot \cos(\alpha)$ –проекция x-составляющей в старой системе координат на новую ось X' ,

$y_{x'} = y \cdot \sin(\alpha)$ – проекция y-составляющей в старой системе координат на новую ось X' .

$x_{y'} = -x \cdot \sin(\alpha)$ - проекция x-составляющей в старой системе на ось Y' ,

$y_{y'} = y \cdot \cos(\alpha)$ - проекция y-составляющей в старой системе координат на ось Y' .

Координаты т.M в новой (повернутой) СК

$x' = x_{x'} + y_{x'} = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha)$, (2)

$y' = x_{y'} + y_{y'} = -x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)$ (3)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5)$$

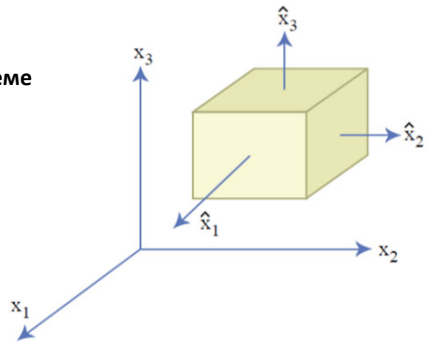
Матрица поворота на угол α : $ROT(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (6)

Тензор напряжений

Тензор напряжений — это представление напряжений на трёх взаимно перпендикулярных плоскостях в системе координат. Он задаёт **полное** напряжённое состояние.

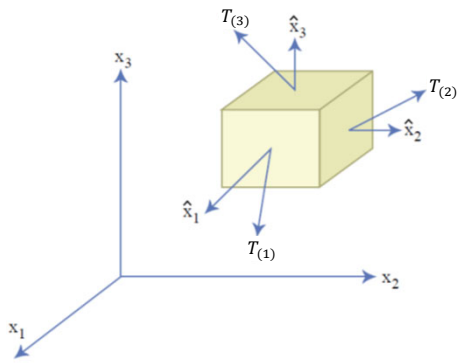
Представление напряжённого состояния в трёх измерениях требует **девяти чисел**, каждое привязано к **координатной оси и плоскости**, **перпендикулярной** координатной оси. Чтобы понять, что означает каждое из девяти чисел, полезно представить бесконечно малый куб в сплошной среде, ориентированный в трёхмерной системе координат.

Бесконечно малый куб в системе координат



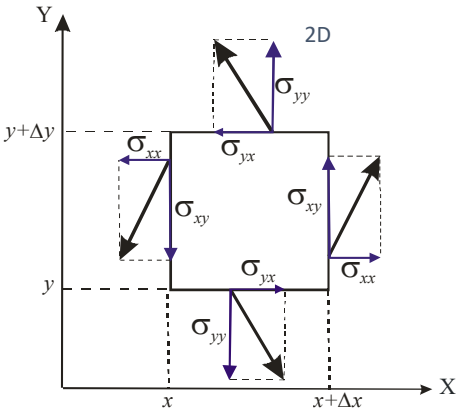
Система координат имеет оси x_1, x_2, x_3, **нормальные** к граням куба.
Грани куба определяются единичными нормальными векторами $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$, которые положительны, когда направлены наружу из куба.

Если на каждую грань куба действуют равномерные силы, то на каждой грани можно определить векторы тракций.
Пусть тракции на гранях $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ называются $T_{(1)}, T_{(2)}, T_{(3)}$ соответственно (индексы – но оси, к которой перпендикулярна данная грань).
Эти тракции **не обязательно нормальны** к граням.



Компоненты тензора напряжений 2D

Тракции $T_{(x)}, T_{(y)}$ **каждая** определяется 2-мя компонентами —нормальной и сдвиговой тракциями. Эти компоненты обозначаются двумя индексами, например σ_{ij}. Первый индекс i обозначает сторону, перпендикулярную оси i, **на которую** действует тракция, а второй индекс j обозначает **направление оси**, вдоль которой направлена тракция. $(i, j = x,y)$



В векторной записи поверхностные силы на гранях куба записываются:

$$T_{(x)} = \langle \sigma_{xx}, \sigma_{xy} \rangle$$

$$T_{(y)} = \langle \sigma_{yx}, \sigma_{yy} \rangle$$

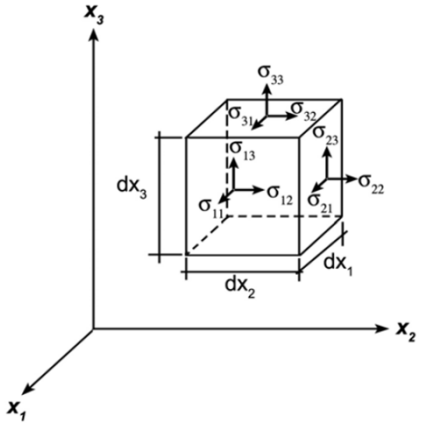
В матричной записи поверхностные силы записываются:

Тензор напряжений

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

Компоненты тензора напряжений 3D

Тракции $T_{(1)}, T_{(2)}, T_{(3)}$ **каждая** определяется тремя компонентами — одной нормальной и двумя сдвиговыми тракциями. Эти компоненты обозначаются двумя индексами, например σ_{ij}. Первый индекс i обозначает грань куба, перпендикулярную оси i, **на которую** действует тракция, а второй индекс j обозначает **направление оси**, вдоль которой направлена тракция.



В векторной записи поверхностные силы на гранях куба записываются:

$$T_{(1)} = \langle \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13} \rangle$$

$$T_{(2)} = \langle \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23} \rangle$$

$$T_{(3)} = \langle \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33} \rangle$$

В матричной записи поверхностные силы записываются:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

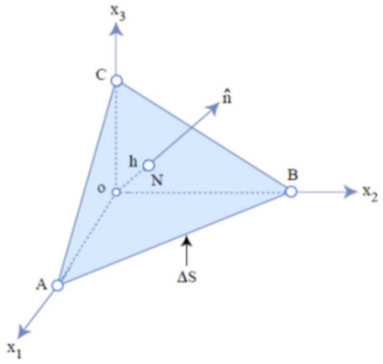
Эта матрица **называется тензором** напряжений. Это полное представление напряжения в точке.

Тетраэдр Коши и тракция на произвольных плоскостях

вектор тракции в точке на **произвольно ориентированной** плоскости можно найти, если известны $T_{(1)}, T_{(2)}, T_{(3)}$ в этой точке.

Применим второй закон Ньютона к свободному телу в форме тетраэдра и позволим высоте тетраэдра стремиться к нулю.

Тетраэдр Коши



Т. O — начало координат, вершины A, B, C.

ρ — плотность;
F_i — массовая сила на единицу массы в i-м направлении;
a_i — ускорение в i-м направлении;
h — высота тетраэдра, измеренная перпендикулярно ABC;
ΔS — площадь наклонной поверхности ABC;
T_i — компонента вектора поверхностной силы на наклонной поверхности в i-м направлении.
n_i — компонента вектора нормали к наклонной поверхности в i-м направлении.

Масса тетраэдра равна $m=\frac{1}{3}\rho h \Delta S$.

Площадь грани, перпендикулярной x_i, равна $n_i \Delta S$.

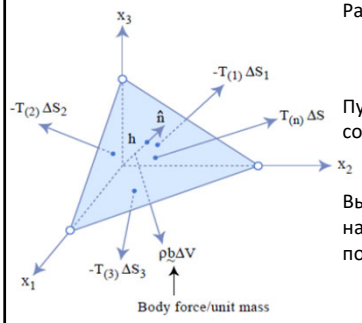
Баланс сил на тетраэдре

Пусть действует удельная массовая сила $\boldsymbol{F}$. Рассмотрим баланс сил Σf в направлении $i = 1$

Черта сверху обозначает величины, осреднённые по поверхности или объёму.

$$\Sigma f_{\ 1} = m a_1$$

$$F_1\left(\frac{1}{3}\bar{\rho} h \Delta S\right) + \bar{T}_{(n)1}\Delta S - \bar{\sigma}_{11}(n_1 \Delta S) - \bar{\sigma}_{21}(n_2 \Delta S) - \bar{\sigma}_{31}(n_3 \Delta S) = \left(\frac{1}{3}\bar{\rho} h \Delta S\right) a_1$$



Разделим обе стороны на ΔS.

$$F_1\left(\frac{1}{3}\bar{\rho} h\right) + \bar{T}^1_{(n)} - \bar{\sigma}_{11} n_1 - \bar{\sigma}_{21} n_2 - \bar{\sigma}_{31} n_3 = \left(\frac{1}{3}\bar{\rho} h\right) a_1$$

Пусть $h \to 0$ так, что $\Delta S \to 0$, $\Delta V \to 0$, а ориентации поверхностей сохраняются. Масс. сила $F \to 0$ и масса $m \to 0$.

$$\bar{T}_{(n)1} = \bar{\sigma}_{11} n_1 + \bar{\sigma}_{21} n_2 + \bar{\sigma}_{31} n_3$$

Выполняя такой же баланс сил в двух других координатных направлениях, получаем выражения для трёх компонент вектора поверхностной силы на произвольной плоскости.

$$T_{(n)_1} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3$$
$$T_{(n)_2} = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3$$
$$T_{(n)_3} = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

Совокупность этих трёх уравнений называется **формулой Коши.**

Различные обозначения

1. Общее уравнение для приведённых выше явных выражений:

$$T_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji}\, n_j$$

2. Нотация суммирования — способ записи сумм без знака суммирования Σ. Чтобы использовать её, нужно просто опустить Σ и суммировать по повторяющимся индексам. Уравнение в нотации суммирования:

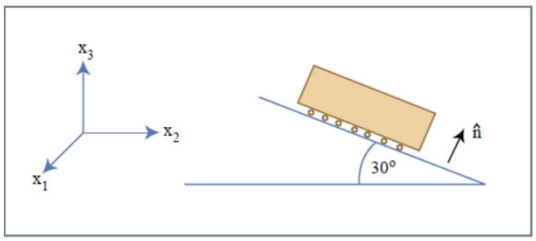
$$T_i = \sigma_{ji} n_j$$

3. Уравнение в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Пример

рассмотрим скользящий брусок на наклонной плоскости $\theta = 30°$.



На плоскости скольжения: чему равен вектор поверхностной силы T через σ_{ij}?

$$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3) = (0, \cos 60°, \cos 30°) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

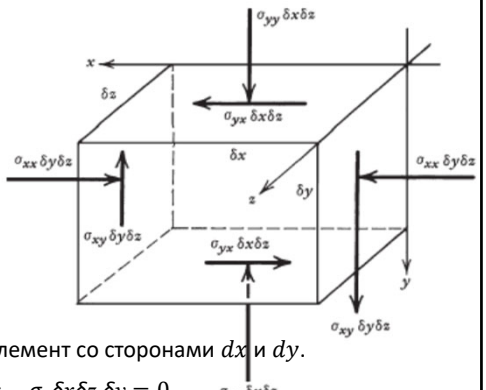
Свойства тензора напряжений

Тензор напряжений — симметричный тензор

Напряжения в 2D

$M_{z+} = \sigma_{xy}\delta y\delta z\ \delta x$

$M_{z-} = \sigma_{yx}\delta x\delta z\ \delta y$



Рассмотрим моменты Mz, действующие на элемент со сторонами dx и dy.

$$M_z = \sigma_{xy}\delta y\delta z\ \delta x - \sigma_{yx}\delta x\delta z\ \delta y = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Аналогично в 3D: $\sigma_{32} = \sigma_{23}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}$.

Тензор напряжений **симметричен**, то есть

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

В результате весь тензор может быть задан только **шестью** числами вместо девяти.

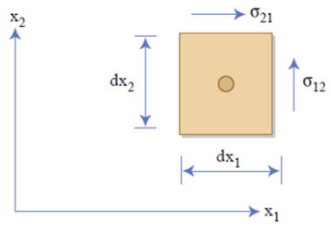
Свойства тензора напряжений

Тензор напряжений — симметричный тензор

Тензор напряжений **симметричен**, то есть

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

В результате весь тензор может быть задан только шестью числами вместо девяти.



Рассмотрим моменты M, действующие на элемент со сторонами dx_1 и dx_2.

$$M_3 = 2\sigma_{12}\frac{dx_1}{2}dx_2 - 2\sigma_{21}\frac{dx_2}{2}dx_1 = 0$$

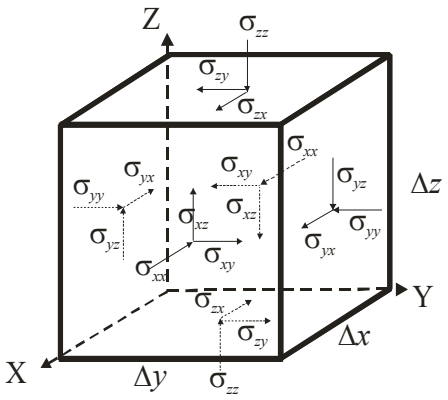
$$\Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21}$$

АналогичноS:

$$\sigma_{32} = \sigma_{23}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}.$$

Касательные напряжения всегда «сопряжены» (парны).

3D



Тензор напряжений

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

На диагонали (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}) - **нормальные** напряжения сжатия (растяжения), вне диагонали - **сдвиговые** напряжения σ_{ij}.

Часто сдвиговые напряжения обозначают τ_{ij}, чтобы подчеркнуть их касательный (*тангенциальный*) характер.

Тензор напряжений *симметричный* $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

содержит только 6 *различных* компонент

Выбором подходящих направлений координатных осей можно привести тензор напряжений к виду

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1^*)$$

(1, 2, 3) - *главные оси*, а напряжения σ_1, σ_2, σ_3 – *главные напряжения*

Всестороннее давление $p = -\sigma_{ср}$, **(2)**

где $\sigma_{ср} = 1/3\ (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.

В силу **инвариантности** давления

$$p = -\ 1/3\ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}).$$

Девиатор тензора напряжений: $\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{ср} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_{ср} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_{ср} \end{pmatrix}$ **(1**)**

для описания деформаций, вызванных *тектоническими* причинами